

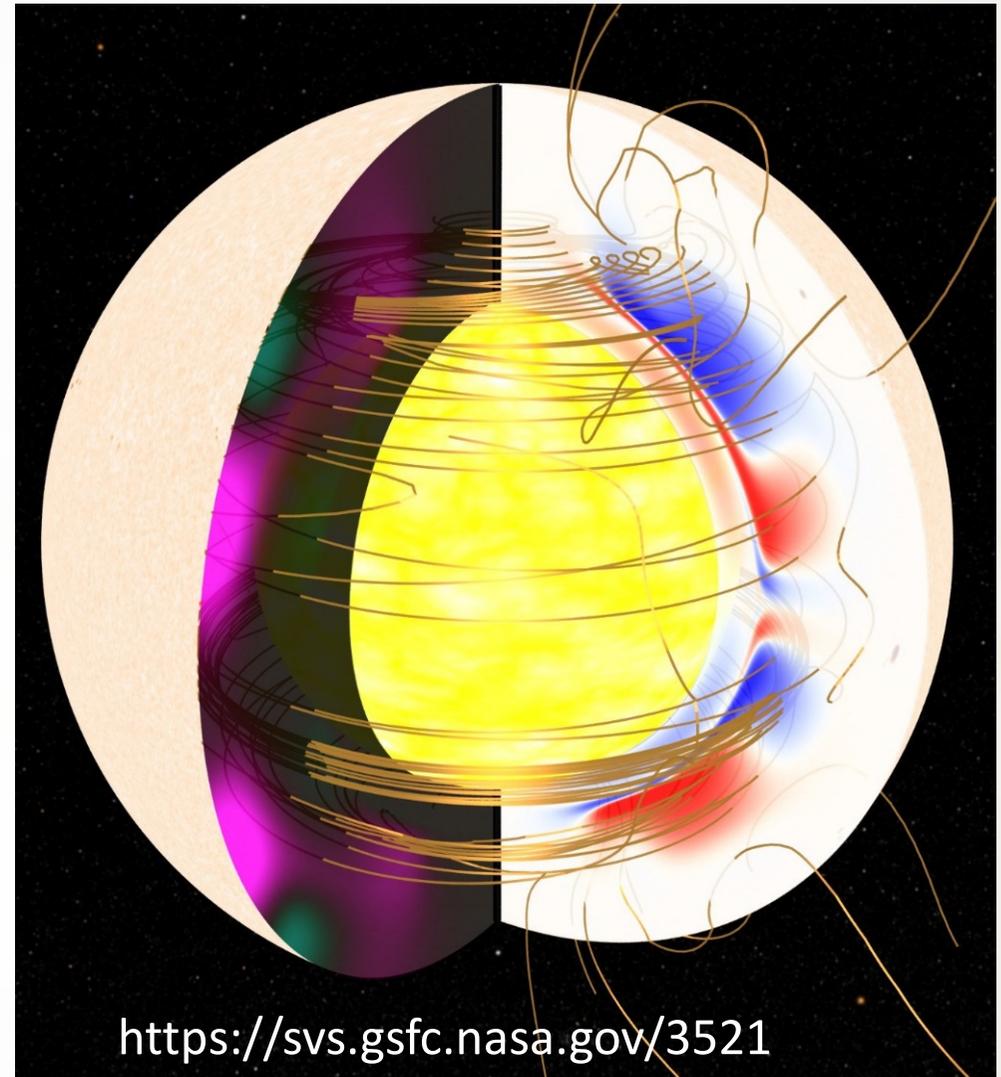
# СТАТИСТИКА ГОДОВЫХ ЧИСЕЛ ВОЛЬФА, ИХ ПРОИЗВОДНЫХ, ХАРАКТЕРНЫХ ЧАСТОТ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЕЙ

*Старченко С.В. и Яковлева С.В.*

*Институт земного магнетизма,  
ионосферы и распространения  
радиоволн РАН (ИЗМИРАН)  
Калужское шоссе 4, Троицк, Москва,*



*E-mail: [sstarchenko@mail.ru](mailto:sstarchenko@mail.ru);  
[svyakov@inbox.ru](mailto:svyakov@inbox.ru)*



<https://svs.gsfc.nasa.gov/3521>

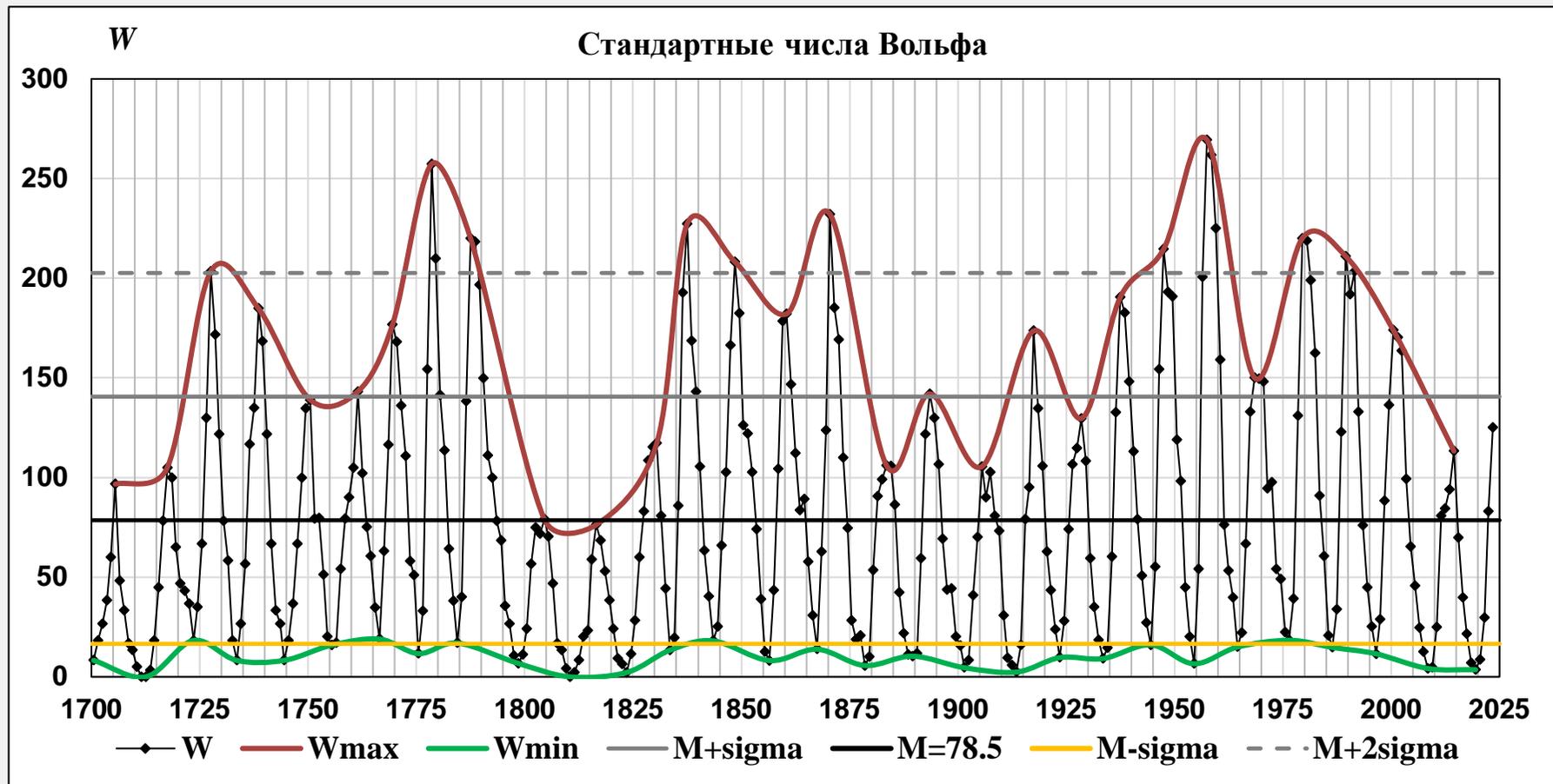
## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уже давно [Anderson, 1939; Bracewell, 1953] изучается ряд чисел Вольфа  $W$  и знакопеременный ряд, являющийся, по энергетическим соображениям [Старченко, Яковлева, 2022], рядом квадратных корней из чисел Вольфа  $Q$  со знаками, меняющимися в соответствии с фазой полного магнитного цикла. Воспроизведенный нами знакопеременный ряд соответствует изменению полярного поля в северном полушарии [Kane et al., 1991].

Ряды чисел Вольфа неоднократно исследовались различными статистическими методами, например [Nandy et al., 2021]. В частности, авторы данного исследования уже публиковали свои результаты определения базовых статических характеристик временного ряда, к которым, в частности, относятся разнообразные средние, пиковые и наиболее вероятные значения чисел Вольфа  $W$  [Старченко, Яковлева, 2024].

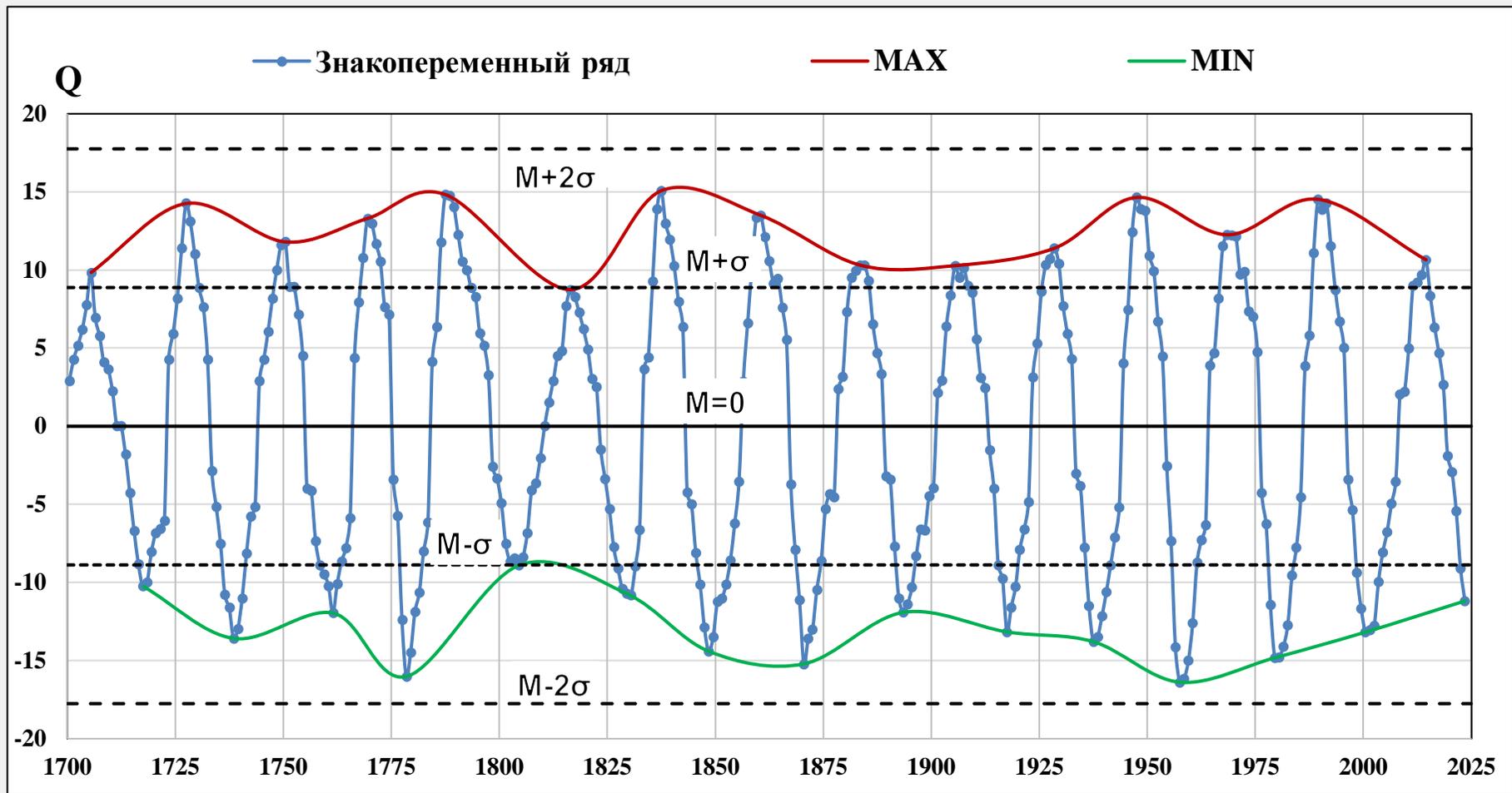
Некоторые результаты подобных исследований, впрочем, вполне могут быть согласованы с этой нашей работой. Так, центральная для нас, вероятностная функция распределения  $W$  многократно [Abdel-Rahman and Marzouk, 2018; Shibaev and Ishkov, 2012; Noble and Wheatland, 2011; Журавлев и Летуновский, 2010, 2011; Ишков и Шубаев, 2006; Barnes et al., 1980] использовалась преимущественно для прогнозирования, исходя частично из некоторой теории и частично из практики. Мы же получили эту функцию не только для  $W$ , но и для  $W'$ , а также частот  $S = W'/W$ , опираясь исключительно на известные данные.

В настоящей работе мы приводим аналогичное исследование, но уже для знакопеременного ряда  $Q$ , а также приводим некоторые соображения на основе сопоставления результатов с соответствующими расчетами для полного ряда чисел Вольфа. При расчетах мы используем среднегодовые числа Вольфа  $W$  с 1700 по 2024 гг. в версии v2 (<http://sidc.oma.be/silso/datafiles>).



**Рис.1** Временной ряд чисел Вольфа ( $W$ ) с некоторыми статистически важными характеристиками.

Также на рис.1 представлены огибающие кривые, построенные посредством последовательного сглаженного соединения точек, соответствующих максимумам и минимумам чисел  $W$ . Эти огибающие кривые выглядят квазигармоническими, и можно попытаться оценить их характерные периоды по количеству локальных экстремумов. Для определенности учитывали только экстремумы, достаточно отстоящие от соответствующей усредненной величины, которая представлена горизонтальной линией. Получаем 7 локальных максимумов и 8 минимумов, т.е. в среднем 7.5, что дает период в годах по самоочевидной формуле:  $(2020-1700)/(7.5-1) \sim 50$ . Особо выделяются доминирующие максимумы около 1780 и 1956 годов. Их разделяет 176 лет, и эти фактически 150-200 лет являются самой долговременной, но весьма грубой оценкой гармонического периода в исходных данных.



**Рис.2** Эволюция знакопеременного поля ( $Q$ ) со средним значением  $M$  и отклонениями.

Аналогично рисунку 1 здесь также представлены огибающие кривые, которые насчитывают 5 локальных максимумов и 4 минимума. Итого в среднем имеем 4.5, что дает период в годах по самоочевидной формуле:  $(2024-1700)/(4.5-1) \sim 90$ . Особо выделяются пары доминирующих максимумов  $\sim 1787$  и  $1837$  годов (с разницей в 50 лет), а также  $1947$  и  $1989$  (с разнице в 42 года). Разница между первыми и вторыми максимумами в парах составляет 160 и 153 года соответственно, что совпадает с оценкой гармонического периода для исходного ряда  $W$ .

## Поисковые статистические исследования

Поисковые статистические исследования нацелены на поиск гипотетических закономерностей для преимущественно неслучайных процессов. Старченко и Яковлева [2021] частично обосновали предлагаемую методику поисковых исследований в результате ее апробации на ряде значений глобальной геомагнитной энергии  $E$  и ее производной  $dE/dt$ , которые являются прямыми аналогами  $W$  и  $W'$ . Временные производные  $dW/dt = W'$  (и соответственно  $dQ/dt = Q'$ ) получены посредством взятия среднего от производной слева и справа. Это простейшее усреднение производной, надеемся, несколько сглаживает изначальные ошибки, проистекающие из наблюдательного и договорного определения изучаемой величины. Характерные частоты определялись как отношение временной производной к самой исследуемой величине  $S_w = W'/W$  (аналогично  $S_q = Q'/Q$ ). Ниже в таблице собраны основные статистические характеристики годовых чисел Вольфа, их производных и характерных частот, а также соответствующие характеристики для ряда  $Q$

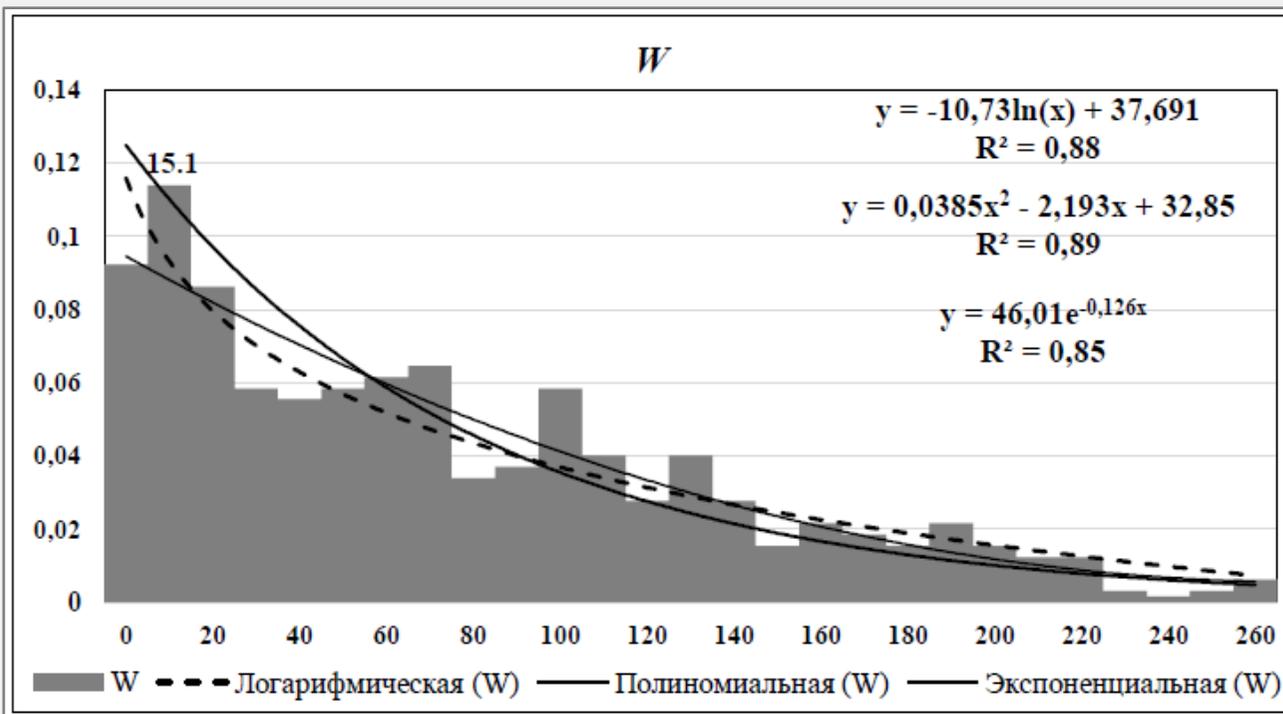
	Ряд чисел Вольфа			Знакопеременный ряд		
	$W$	$W'$	$S_w$	$Q$	$Q'$	$S_q$
Среднее $M$	78.52	0.392	0.0482	-0.0399	-0.0477	0.0781
Стандартная ошибка	3.44	1.83	0.0404	0.493	0.152	0.0341
Медиана MDN	65.55	-5.85	-0.115	2.049	-0.307	-0.0272
Мода	15.1	-14.2	-0.240	-8.55 / 4.47	-1.51 / 1.53	-0.147
Стандартное отклонение ( $\sigma$ )	61.92	32.86	0.726	8.889	2.738	0.612
Дисперсия выборки	3833.8	1079.7	0.527	78.999	7.495	0.375
Экссесс	-0.117	0.393	1.551	-1.387	-0.239	1.779
Асимметричность	0.813	0.744	1.081	-0.048	0.099	0.831
Интервал	269.3	186.5	4.380	31.487	13.651	3.586
Минимум MIN	0	-74.35	-1.607	-16.41	-6.733	-1.281
Максимум MAX	269.3	112.15	2.773	15.076	6.918	2.305
Сумма	25441.8	126.6	15.56	-12.963	-15.391	25.222
Общее количество	325	323	323	325	323	323

Далее на Рисунках 3-5 приведены гистограммы или ступенчатая функция распределения вероятностей. Высота каждого столбца гистограммы (или эквивалентно - безразмерное значение каждой ступеньки функции распределения) получается посредством деления количества реализаций на общее количество (323) реализаций и на фиксированную (свою для каждого случая) ширину каждой ступеньки или столбца гистограммы. При этом, очевидным образом выполняется и нормировочное условие - интеграл (или площадь затемненной на рисунках области) гистограммы равен 1.

Бросается в глаза «изрезанность» и «дискретность» гистограмм, когда ее столбцы весьма существенно и нерегулярно отклоняются от гладких кривых. Это, по-видимому, в первую очередь обусловлено недостаточной длиной временного ряда, а также возможно указывает на тенденцию к формированию выделенных значений.

Для сравнения на некоторые гистограммы нанесены наиболее подходящие аппроксимирующие кривые, Например, ступенчатая функция распределения чисел Вольфа  $W$  с ошибкой менее 15% может быть аппроксимирована экспоненциальной или логарифмической функцией, а также полиномом второй степени. В то же время, ступенчатая функция распределения знакопеременного ряда можно грубо аппроксимировать с помощью бинормального распределения. Также предварительно можно заключить, что распределения подобное нормальному характерно для временных производных обоих рядов  $W'$  и  $Q'$ , см. Рис. 4а и 4b соответственно.

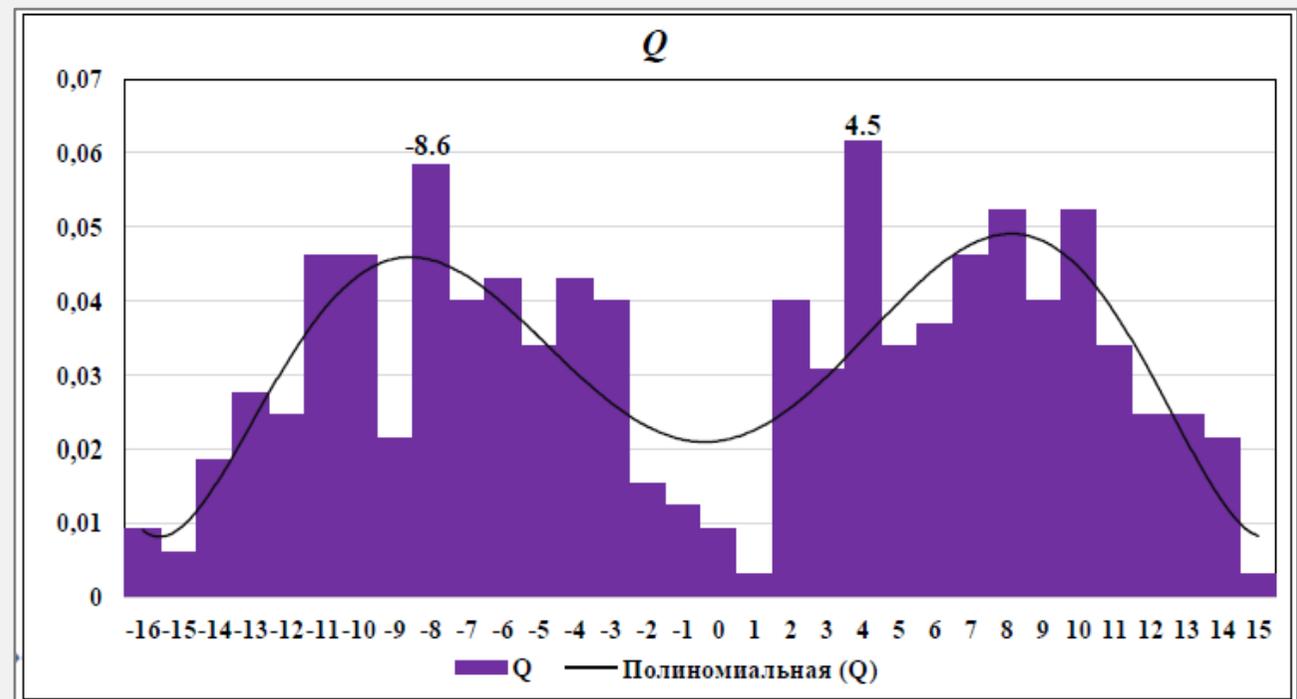
Распределение частот (см.  $S_w$  на Рис.5а для  $W$  и  $S_q$  на Рис.5b для  $Q$ ) тоже весьма сходны и могут быть аппроксимированы «перекошенными» нормальными распределениями. При этом наиболее вероятные или пиковые значения соответствуют периоду около 5-ти лет для  $W$  и 7-ми лет для  $Q$ . Первый период соответствует удвоению частоты солнечного цикла и квадратичной динамо-нелинейности. Второй - примерно одна треть от полного цикла знакопеременного поля и соответствует кубической нелинейности.

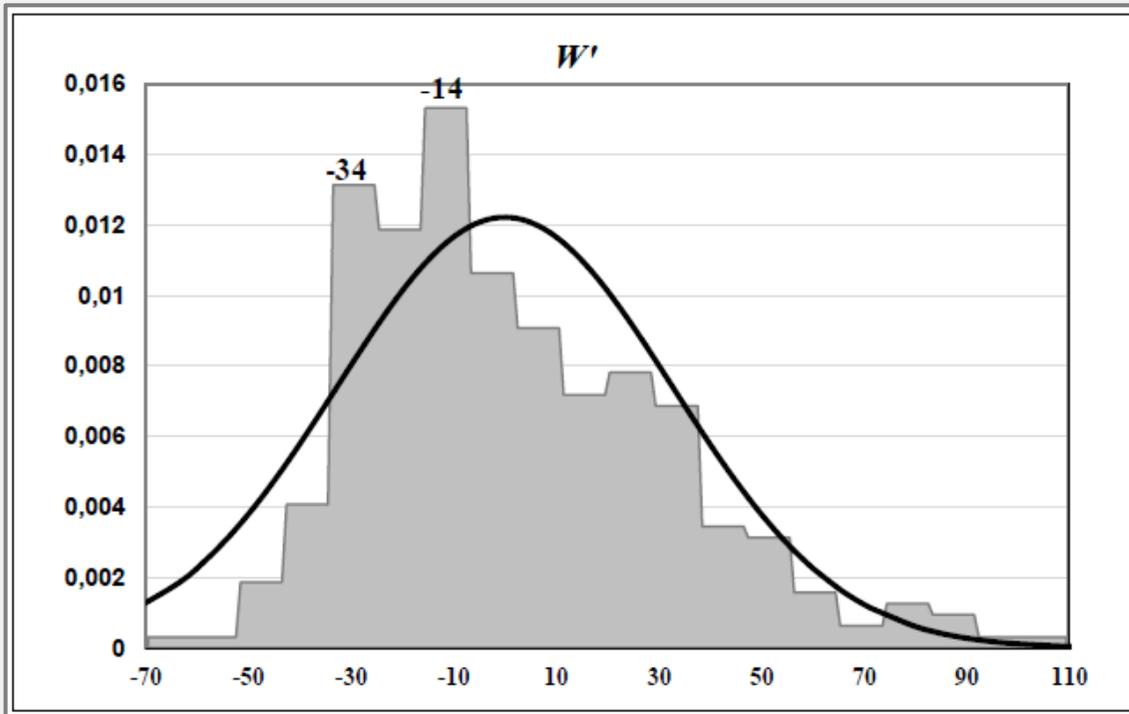


**Рис.3а** Гистограмма или ступенчатая функция распределения вероятности реализаций (отложена по вертикальной оси) для чисел Вольфа  $W$  (отложены по горизонтальной оси). Все оси и средние значения  $W$  над столбцами гистограммы - безразмерные. Методом наименьших квадратов построена экспоненциальная зависимость (сплошная линия), аппроксимирующая гистограмму с достоверностью  $R^2=0.846$ .



**Рис.3б** Гистограмма или ступенчатая функция распределения вероятности реализаций (отложена по вертикальной оси) для знакопеременного ряда  $Q$  (отложены по горизонтальной оси). Все оси и средние значения над столбцами гистограммы - безразмерные. Гистограмму можно грубо аппроксимировать с помощью бинормального распределения.

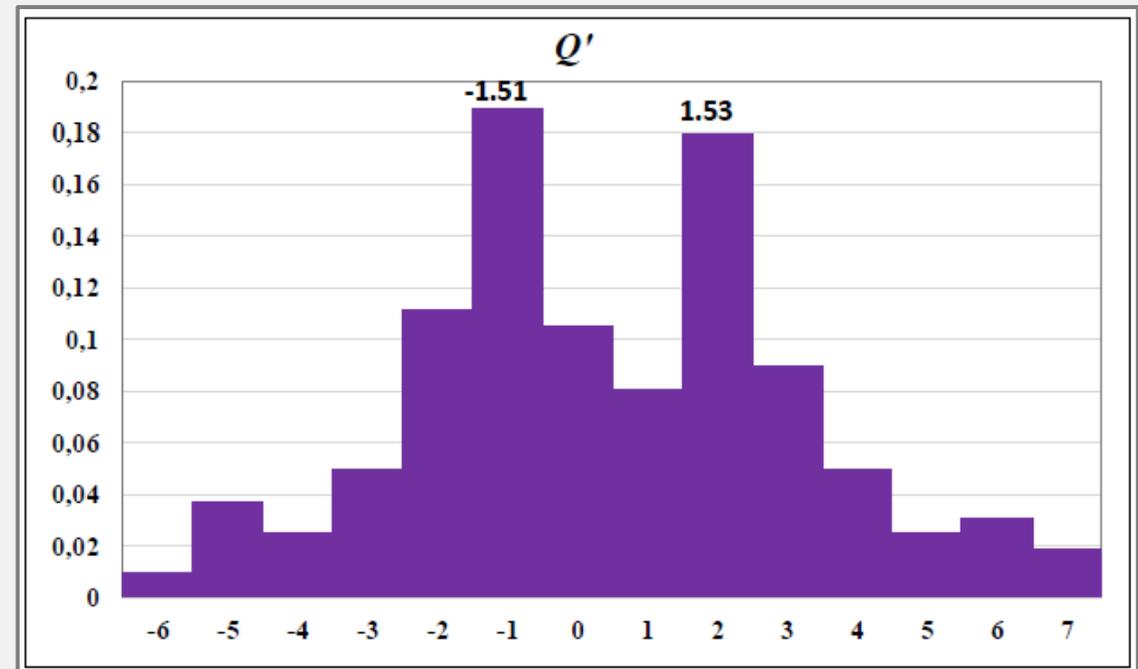


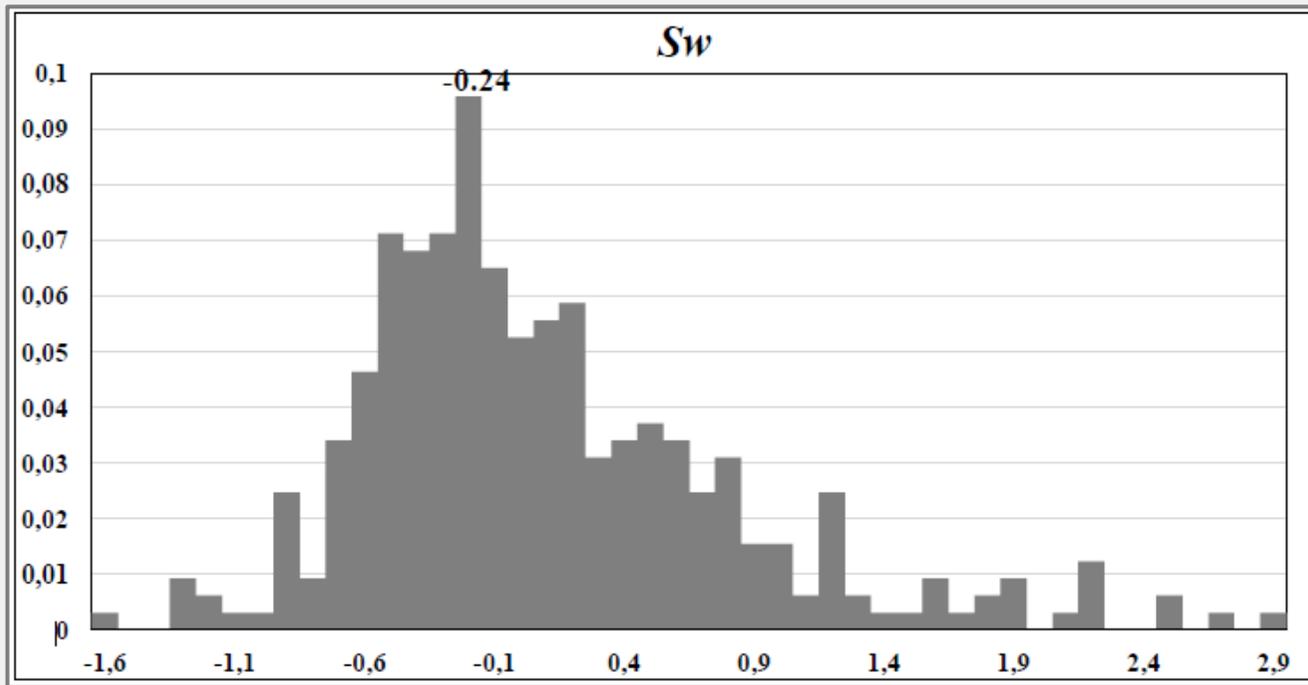


**Рис. 4а.** Ступенчатая функция распределения вероятности реализаций или кратко - гистограмма (отложена по вертикальной безразмерной оси) для производных от чисел Вольфа  $W$  (отложены по горизонтальной оси в 1/год). Значения над столбцами гистограммы - в 1/год. Приведена, для сравнения, функция нормального распределения в виде кривой с тем же средним и дисперсией, что и у гистограммы.



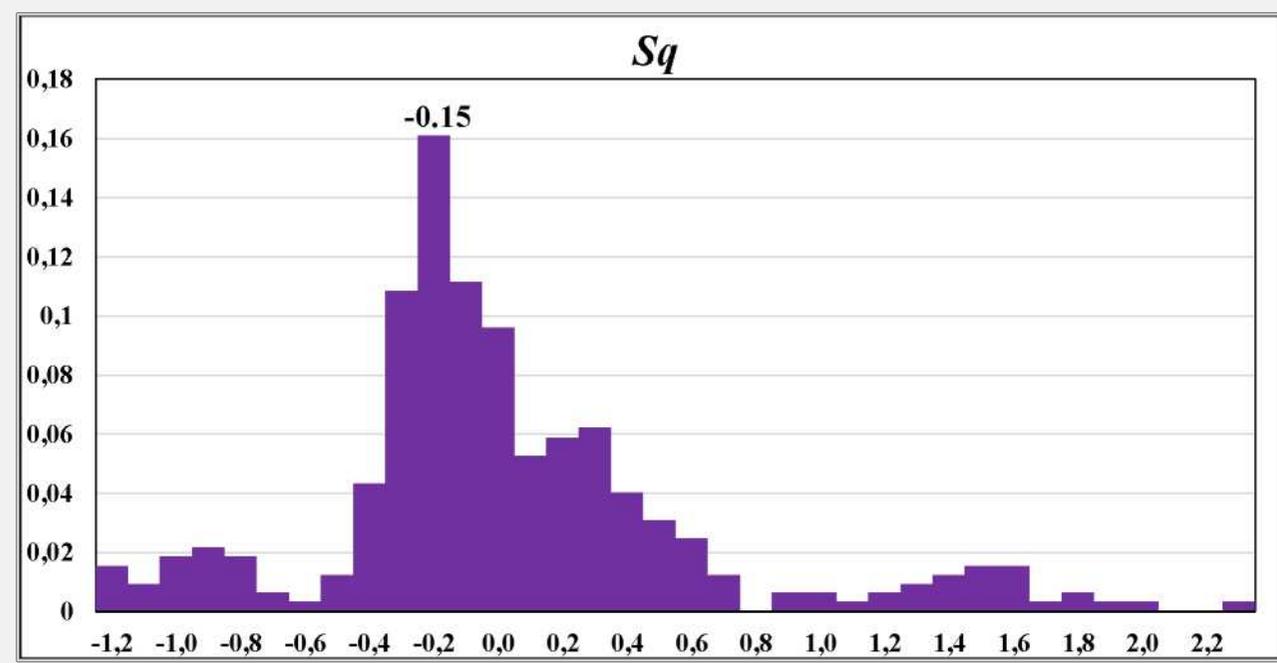
**Рис.4б.** Ступенчатая функция распределения вероятности реализаций или кратко - гистограмма (отложена по вертикальной безразмерной оси) для производных ряда  $Q$  (отложены по горизонтальной оси в 1/год). Значения над столбцами гистограммы - в 1/год.





**Рис. 5а.** Ступенчатая функция распределения вероятности реализаций или кратко - гистограмма (отложена по вертикальной безразмерной оси) для частот чисел Вольфа  $S_w = W'/W$  (отложены по горизонтальной оси в 1/год). Значения над столбцами гистограммы - в 1/год.

**Рис.5б.** Ступенчатая функция распределения вероятности реализаций или кратко - гистограмма (отложена по вертикальной безразмерной оси) для частот знакопеременного ряда  $S_q = Q'/Q$  (отложены по горизонтальной оси в 1/год). Значения над столбцами гистограммы - в 1/год.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- ❖ Статистически и частотно исследованы среднегодовые числа Вольфа  $W$  и знакопеременные  $Q = \pm(W)^{1/2}$ , временные производные  $W'$  и  $Q'$ , а также частоты  $SW$  и  $SQ$ , равные отношению временной производной к самой величине.
- ❖ Вероятностное распределение  $W$  почти экспоненциально с наиболее вероятным значением 18, при среднеквадратичном 100, медианном 65 и среднем 79.
- ❖ Для знакопеременного ряда: распределение грубо бинормально, среднее -0.04, медиана 2, среднеквадратичное отклонение 8.9 и наиболее вероятное значение 4.3.
- ❖ Меньше от нормального распределения отклоняются временные производные от  $W$  с наиболее вероятным 24/год, медианным -5.9/год, средним 0.4/год, среднеквадратичным 33/год, минимумом -74/год и максимумом 112/год. Для знакопеременного ряда: среднее (-0.05), медиана -0.3, среднеквадратичное отклонение 2.7 и наиболее вероятное значение -2.3.
- ❖ Частоты  $SW = W'/W$  и  $SQ = Q'/Q$  отрицательны если  $W$  или  $Q$  убывает и положительны при росте. Для чисел Вольфа  $SW$  среднее  $0.05 \text{ год}^{-1}$ , медианное  $-0.12 \text{ год}^{-1}$ , среднеквадратичное отклонение  $0.73 \text{ год}^{-1}$  и наиболее вероятным  $-0.24 \text{ год}^{-1}$ . Или  $1/SW$  дает 20 лет, -8 лет, 1.4 года и -4 года. Последнее время примерно в три раза меньше периода солнечного цикла, что грубо соответствует кубической нелинейности динамо.
- ❖ Для знакопеременного поля  $SQ$  среднее  $0.08 \text{ год}^{-1}$ , медианное  $-0.03 \text{ год}^{-1}$ , среднеквадратичное отклонение  $0.61 \text{ год}^{-1}$  и наиболее вероятным  $-0.15 \text{ год}^{-1}$ . Времена: 12.5 лет, 33 года, 1.6 лет и -7 лет. И опять получаем кубическую нелинейность.

## ЛИТЕРАТУРА

- **Abdel-Rahman H.I., Marzouk B.A.** Statistical method to predict the sunspots number // NRIAG J. Astron. Geophys. V.7. P. 175-179. 2018.
- **Anderson C. N.** A representation of the sunspot-cycle // Bell System Technical Journal. V.44. N 21. P. 292-299. 1939.
- **Bracewell R.N.** The sunspot number series // Nature.V.174. P.649-650.1953.
- **Kane R.P., Trivedi N.B.** Spectral analysis of annual sunspot series-an update // PAGEOPH. V.135, N.3. P.463-474. 1991.
- **Nandy et al.** Progress in Earth and Planetary // Science 8:40. 2021.
- **Noble P.L. and Wheatland M. S.** Modeling the sunspot number distribution with a Fokker-Planck equation // The Astrophysical Journal. V. 732(5). P. 1-8. 2011.
- **Shibaev, I., Ishkov V.** Investigation of the Statistical Characteristics of Wolf Numbers Reliable Series: Signs of Solar Cycles Likelihood // Proc. 7th Scientific Conf. "Space, Ecology, Safety" - SES 2011, Sofia, Bulgaria, SRTI-BAS. P. 297-301. 2012.
- **Журавлев В.М., Летуновский С.В.** Анализ долговременной эволюции активности Солнца на основе ряда чисел Вольфа. // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико -математические науки. № 4. С. 120-129. 2010 (I Методика), №4. С. 164-174. 2011 (II Результаты).
- **Ишков В.Н., Шибеев И.Г.** Циклы солнечной активности: общие характеристики и современные границы прогнозирования // Изв. РАН. Серия физ. Т. 70. № 10. С.1439-1442. 2006.
- **Старченко С.В., Яковлева С.В.** Двухвековая эволюция и статистика времен вариаций энергии потенциального геомагнитного поля // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 61. № 5. стр. 661-671. 2021.
- **Старченко С.В., Яковлева С.В.** Корреляция временных рядов чисел Вольфа и их производных // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 62. № 6. С. 693-701. 2022.
- **Старченко С.В., Яковлева С.В.** Спектры годовых чисел Вольфа и соответствующих знакопеременных полей // Труды XXVIII всероссийской ежегодной конференции «Солнечная и солнечно-земная физика-2024» СПб. : ГАО РАН, С.142-146, 2024.